ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐẶNG MẠNH HÙNG

GIẢI SỐ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN MA TRẬN VỚI RÀNG BUỘC ĐA TẠP

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐẶNG MẠNH HÙNG

GIẢI SỐ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN MA TRẬN VỚI RÀNG BUỘC ĐA TẠP

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số : 8 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. Nguyễn Thanh Sơn

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

Bảng ký hiệu

$\otimes$	tích tenxơ của các không gian vectơ
$C^\infty(\mathcal{M})$	tập tất cả các hàm trơn trên $\mathcal{M}$
$H_x = \nabla_x H$	gradiant theo biến số x
$P_\mathcal{M}$	hình chiếu trên $\mathcal{M}$
$\mathrm{sym}(\mathrm{A})$	phần đối xứng của ma trận vuông A
$\mathrm{skew}(\mathrm{A})$	phần phản đối xứng của ma trận vuông A
$\Pi_{T_Y}(Z)$	hình chiếu từ $\mathbb{R}^{n\times k}$ lên các không gian
$C^k(U, \mathbb{R}^m)$	tập tất cả các ánh xạ khả vi liên tục tới cấp k
$C^\infty(U, \mathbb{R}^m)$	tập tất cả các ánh xạ trơn
$C^\omega(U, \mathbb{R}^m)$	tập tất cả các ánh xạ giải tích từ U vào $\mathbb{R}^m$

Mở đầu

Với phương trình vi phân (PTVP) ma trận thông thường, nghiệm của chúng là các hàm ma trận khả vi một biến và thỏa mãn phương trình. Tuy nhiên, khi PTVP đó là một mô hình toán học mô tả những hiện tượng trong cơ học, hóa học, thiên văn học thì những ràng buộc đối với ma trận đó thường xuất hiện. Về mặt toán học, chúng đơn giản chỉ là các biểu thức đại số. Nhưng chúng biểu thị các quy luật bất biến, chẳng hạn bất biến năng lượng, bất biến về khối lượng, bất biến về thể tích. Trong các ngành khoa học tương ứng, nó vốn dĩ là các định luật bảo toàn nổi tiếng. Trong rất nhiều trường hợp, các ràng buộc đó đối với nghiệm đã tạo lên những đa tạp trong không gian pha. Chẳng hạn, Định lý 1.2.7 trong Chương 1 đã chỉ ra, một đa tạp con nhúng của $\mathbb{R}^n$ có thể được mô tả bởi một biểu thức dạng $g(x) = c$, trong đó $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Do đó, ta gọi chung những phương trình loại này là PTVP với ràng buộc đa tạp.

Phương pháp giải số các PTVP với ràng buộc đa tạp, ngoài việc đảm bảo các yêu cầu về tính chính xác và tính ổn định thông thường của một phương pháp số còn phải đảm bảo rằng nghiệm xấp xỉ luôn nằm trên đa tạp đó. Cụ thể hơn giả sử x_0 là điều kiện ban đầu của phương trình, tức là $g(x_0) = c$ thì với mỗi nghiệm x_k tại các bước, x_k nói chung ta đều phải có $g(x_k) = c$. Lẽ đương nhiên, các phương pháp được trình bày ở Chương 1 không đảm bảo việc này. Ta cần phải có những điều chỉnh, thay đổi thích hợp trong quá trình giải số. Những điều chỉnh này đôi khi tương đối đơn giản nhưng trong nhiều hoàn cảnh khác lại đòi hỏi những kiến thức sâu sắc về các đa tạp liên quan.

Với luận văn "Giải số phương trình vi phân ma trận với ràng buộc đa tạp ", mục tiêu của chúng tôi là trình bày một số cách tiếp cận giải số cho phương trình vi phân ma trận với ràng buộc đa tạp. Để đạt được điều đó, chúng tôi bố cục luận văn như sau. Chương 1 được giành để trình bày kiến thức chuẩn bị. Trước tiên, chúng tôi tóm lược một số phương pháp giải số phương trình vi phân thường phổ biến như phương pháp BDF, Nyström, Runge-Kutta. Tiếp đó, chúng tôi nhắc lại một số kiến thức về đa tạp Riemann. Do việc trình bày bài bản tương đối dài, chúng tôi chỉ tóm lược mang tính diễn giải. Chương 2 là chương chính của luận văn. Trước tiên, chúng tôi chính xác hóa khái niệm bằng việc trình bày khái niệm bất biến tích phân, lấy ví dụ minh họa. Sau đó, chúng tôi trình bày phương pháp chính, là phương pháp chung nhất để giải số phương trình vi phân với ràng buộc đa tạp. Thêm vào đó, chúng tôi cũng trình bày phương pháp giải số cho hai loại ràng buộc cụ thể trên đa tạp Stiefel và nhóm Lie. Chúng tôi cũng cố gắng đưa ra một số ví dụ số để minh họa cho các vấn đề được trình bày. Cuối cùng, luận văn kết thúc bởi phần kết luận và tài liệu tham khảo.

Mặc dù đã rất nghiêm túc và cố gắng thực hiện luận văn này, nhưng luận văn sẽ khó tránh khỏi những khiếm khuyết nhất định. Kính mong sự góp ý của các thầy cô để luận văn này được hoàn chỉnh và ý nghĩa hơn.

Luận văn này được thực hiện tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên và hoàn thành dưới sự hướng dẫn của TS. Nguyễn Thanh Sơn. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới người hướng dẫn khoa học của mình, người đã đặt vấn đề nghiên cứu, dành nhiều thời gian hướng dẫn tận tình và đầy trách nhiệm để tác giả hoàn thành luận văn này.

Tác giả đã học tập được rất nhiều kiến thức chuyên ngành bổ ích cho công tác và nghiên cứu của bản thân. Nhân dịp này tác giả xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới các Thầy giáo, Cô giáo đã tham gia giảng dạy lớp Cao học Toán K11C; Nhà trường và các phòng chức năng của Trường, Khoa Toán - Tin, trường Đại học Khoa học- Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập tại trường.

Cuối cùng tác giả xin cảm ơn gia đình, bạn bè, đồng nghiệp đã động viên, ủng hộ

và tạo mọi điều kiện cho tác giả trong suốt thời gian nghiên cứu và học tập.

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2019

Tác giả luận văn

Đặng Mạnh Hùng

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này chúng tôi sẽ trình bày hai mảng kiến thức riêng biệt vốn được sử dụng trong phần chính của luận văn. Mục đầu tiên của chương được dành để nhắc lại một vài phương pháp giải số phương trình vi phân quen thuộc. Tài liệu chính cho mục này là Chương II của quyển sách [5]. Mục thứ hai của chương là một số kiến thức liên quan đến đa tạp. Để cho tiện, chúng tôi tham khảo hai tài liệu chính [1] và [2].

1.1 Một số phương pháp số giải phương trình vi phân.

Trong mục này, chúng tôi xét phương trình vi phân thường cấp một phụ thuộc vào thời gian

$$\dot{y} = f(t, y),\ y(t_0) = y_0. \tag{1.1}$$

Ở đây, ta hiểu $y = y(t) \in \mathbb{R}^n$ là một véctơ cỡ n. Hàm f phụ thuộc vào $n + 1$ biến $f(t, y_1, ..., y_n)$ là một hàm véctơ n thành phần $f = (f_1, ..., f_n)$. Ta giả sử rằng hệ (1.1) thỏa mãn các điều kiện để nó có nghiệm duy nhất. Các lập luận cũng đúng nếu như y và f là các ma trận có cấp bất kỳ tương thích với nhau.

1.1.1 Phương pháp Runge-Kutta

Định nghĩa 1.1.1. Cho $b_i, a_{ij}(i, j = 1, \ldots, s)$ là những số thực và cho $c_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij}$. Một phương pháp Runge-Kutta s-bước được tính bằng cách lấy

$$\begin{aligned} k_i &= f\left(t_0 + c_i h, y_0 + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij}k_j\right),\ i = 1, \ldots, s \\ y_1 &= y_0 + h\sum_{i=1}^{s} b_i k_i. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Các hệ số của phương pháp Runge-Kutta s-bước thường được viết dưới dạng bảng Butcher như sau:

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{11} & \ldots & a_{1s} \\ \vdots & & \vdots & \\ c_s & a_{s1} & \ldots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & \ldots & b_s \end{array}. \tag{1.3}$$

Định nghĩa 1.1.2. Phương pháp Runge-Kutta (hay một phương pháp 1-bước tổng quát) có p bậc, nếu với mọi bài toán đủ trơn (1.1) sai số địa phương $y_1 - y(t_0 + h)$ thỏa mãn

$$y_1 - y(t_0 + h) = \mathcal{O}\left(h^{p+1}\right) \text{ khi } h \to 0.$$

Để kiểm tra bậc của phương pháp Runge-Kutta chúng ta phải khai triển chuỗi Taylor của $y(t_0 + h)$ và y_1 quanh điểm $h = 0$. Điều này dẫn đến điều kiện đại số cho hệ số có các bậc 1, 2, 3 tương ứng như sau:

$$\begin{aligned} & \textstyle\sum_i b_i = 1 && \text{cho bậc } 1; \\ \text{thêm vào đó } & \textstyle\sum_i b_i c_i = 1/2 && \text{cho bậc } 2; \\ \text{thêm vào đó } & \textstyle\sum_i b_i c_i^2 = 1/3 && \\ \text{và } & \textstyle\sum_{i,j} b_i a_{ij} c_j = 1/6 && \text{cho bậc } 3. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Người ta có thể tìm các điều kiện để cho phương pháp có độ chính xác cao hơn. Song, nó chỉ có ý nghĩa về mặt lý thuyết. Trong thực tế, phương pháp bậc không quá 4 là tương đối tốt để giải quyết các bài toán nảy sinh.